

KARTA PRZEDMIOTU**I. Dane podstawowe**

Nazwa przedmiotu	Miara i całka
Nazwa przedmiotu w języku angielskim	Measure and integral
Kierunek studiów	Matematyka
Poziom studiów (I, II, jednolite magisterskie)	I stopnia
Forma studiów (stacjonarne, niestacjonarne)	Stacjonarne
Dyscyplina	Matematyka
Język wykładowy	polski

Koordynator przedmiotu	dr hab. August Zapała
------------------------	-----------------------

Forma zajęć (<i>katalog zamknięty ze słownika</i>)	Liczba godzin	semestr	Punkty ECTS
wykład	30	IV	5
konwersatorium			
ćwiczenia	30	IV	
laboratorium			
warsztaty			
seminarium			
proseminarium			
lektorat			
praktyki			
zajęcia terenowe			
pracownia dyplomowa			
translatorium			
wizyta studyjna			

Wymagania wstępne	Wstęp do matematyki, Analiza matematyczna I, Analiza matematyczna II, Topologia
-------------------	---

II. Cele kształcenia dla przedmiotu

Poznanie podstaw ogólnej teorii miary.
Poznanie miary Lebesgue'a
Poznanie całki Lebesgue'a

III. Efekty uczenia się dla przedmiotu wraz z odniesieniem do efektów kierunkowych

Symbol	Opis efektu przedmiotowego	Odniesienie do efektu kierunkowego
WIEDZA		
W_01	Studenci rozumieją budowę teorii miary, poznają ogólną konstrukcję miary przy pomocy miary zewnętrznej	K_W01, K_W03
W_02	Studenci poznają najważniejsze definicje i twierdzenia teorii miary i całki	K_W02, K_W04, K_W07
W_03	Studenci poznają konstrukcję miary Lebesgue'a i jej własności	K_W03, K_W04, K_W05
W_04	Studenci poznają konstrukcję całki względem dowolnej miary	K_W03, K_W04
UMIEJĘTNOŚCI		
U_01	Studenci umieją obliczać miarę Lebesgue'a różnych zbiorów	K_U01, K_U02, K_U04, K_U09
U_02	Studenci umieją obliczać całki Lebesgue'a różnych funkcji mierzalnych	K_U02, K_U04, K_U13
U_03	Studenci umieją stosować miarę i całkę Lebesgue'a w różnych zagadnieniach teoretycznych oraz praktycznych	K_U03, K_U05, K_U06, K_U07, K_U14
KOMPETENCJE SPOŁECZNE		
K_01	Studenci precyzyjnie formułują pytania służące pogłębieniu zrozumienia tematu oraz uzupełnieniu brakujących elementów rozumowania	K_K01
K_02	Studenci prezentują opinie na temat możliwości zastosowania teorii miary i całki uwzględniając poziom swojej wiedzy i umiejętności	K_K01, K_K05

IV. Opis przedmiotu/ treści programowe

<p>Pojęcia ciała i σ-ciała zbiorów. Ciała i σ-ciała generowane przez rodziny zbiorów. Lemat o istnieniu najmniejszego ciała i σ-ciała zbiorów generowanego przez daną rodzinę zbiorów.</p> <p>Definicja miary. Ogólne własności miar (monotoniczność, skończoność i półskończoność, subaddytywność, graniczne wartości na monotonicznych ciągach zbiorów). Zbiory miary zero i twierdzenie o uzupełnianiu miary.</p> <p>Warunek mierzalności oraz lemat Caratheodory'ego.</p> <p>Miara zewnętrzna i twierdzenie Caratheodory'ego o wyznaczaniu miary poprzez miarę zewnętrzną.</p> <p>Twierdzenie o rozszerzaniu miary z ciała na σ-ciało.</p> <p>Miara zewnętrzna Lebesgue'a. Konstrukcja miary Lebesgue'a.</p> <p>Związek miary Lebesgue'a z objętością zbiorów w przestrzeni euklidesowej.</p> <p>Miara zewnętrzna metryczna w przestrzeni metrycznej i mierzalność zbiorów borelowskich.</p> <p>Mierzalność zbiorów borelowskich w sensie Lebesgue'a. Zbiór Cantora i twierdzenie o istnieniu zbiorów nieborelowskich mierzalnych w sensie Lebesgue'a.</p> <p>Warunki de la Vallée-Poussina mierzalności zbiorów w sensie Lebesgue'a.</p> <p>Przesuwalność miary zewnętrznej Lebesgue'a i miary Lebesgue'a.</p> <p>Konstrukcja zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a.</p> <p>Pojęcie mierzalności funkcji względem σ-ciała zbiorów.</p> <p>Mierzalność funkcji otrzymanych w wyniku różnych operacji algebraicznych na funkcjach mierzalnych. Ciągi funkcji mierzalnych, mierzalność supremum, infimum i granic ciągów funkcyjnych. Podstawowe własności funkcji prostych związane z mierzalnością. Twierdzenie o</p>

aproxymacji funkcji mierzalnych funkcjami prostymi.
 Całkowanie funkcji prostych. Własności całki funkcji prostych (dodatniość, dodatnia jednorodność, liniowość, monotoniczność, addytywność całki jako funkcji zbioru).
 Podstawowe lematy o całkowaniu funkcji prostych. Konstrukcja całki Lebesgue'a. Najważniejsze własności całki Lebesgue'a (np. całki funkcji równych prawie wszędzie, skończoność prawie wszędzie funkcji całkownej, liniowość, addytywność całki jako funkcji zbioru itp.). Kryteria całkowności funkcji w sensie Lebesgue'a. Zbieżność prawie wszędzie i jej podstawowe właściwości. Zbieżność względem miary i jej własności. Zależności między różnymi typami zbieżności.
 Twierdzenie Beppo-Leviego. Twierdzenia Lebesgue'a o całkowaniu monotonicznych ciągów i szeregów funkcyjnych. Lemat Fatou.
 Twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej. Informacje dotyczące przestrzeni funkcji całkownych.

V. Metody realizacji i weryfikacji efektów uczenia się

Symbol efektu	Metody dydaktyczne <i>(lista wyboru)</i>	Metody weryfikacji <i>(lista wyboru)</i>	Sposoby dokumentacji <i>(lista wyboru)</i>
WIEDZA			
W_01	wykład konwencjonalny, dyskusja, ćwiczenia praktyczne	kolokwium, egzamin pisemny	uzupełnione i ocenione kolokwium, protokół
W_02	wykład konwencjonalny, dyskusja, ćwiczenia praktyczne	kolokwium, egzamin pisemny	uzupełnione i ocenione kolokwium, protokół
W_03	wykład konwencjonalny, dyskusja, ćwiczenia praktyczne	kolokwium, egzamin pisemny	uzupełnione i ocenione kolokwium, protokół
W_04	wykład konwencjonalny, dyskusja, ćwiczenia praktyczne	kolokwium, egzamin pisemny	uzupełnione i ocenione kolokwium, protokół
UMIĘJĘTNOŚCI			
U_01	wykład konwencjonalny, dyskusja, ćwiczenia praktyczne, ćwiczenia laboratoryjne	kolokwium, egzamin pisemny	uzupełnione i ocenione kolokwium, protokół
U_02	wykład konwencjonalny, dyskusja, ćwiczenia praktyczne, ćwiczenia laboratoryjne	kolokwium, egzamin pisemny	uzupełnione i ocenione kolokwium, protokół
U_03	wykład konwencjonalny, dyskusja, ćwiczenia praktyczne, ćwiczenia laboratoryjne	kolokwium, egzamin pisemny	uzupełnione i ocenione kolokwium, protokół
KOMPETENCJE SPOŁECZNE			
K_01	wykład konwencjonalny, dyskusja, ćwiczenia praktyczne, ćwiczenia laboratoryjne, metoda problemowa	kolokwium, egzamin pisemny	uzupełnione i ocenione kolokwium, protokół

K_02	wykład konwencjonalny, dyskusja, ćwiczenia praktyczne, ćwiczenia laboratoryjne, metoda problemowa	kolokwium, egzamin pisemny	uzupełnione i ocenione kolokwium, protokół
------	---	-------------------------------	---

VI. Kryteria oceny, wagi...

WYKŁAD:

Wymagane jest zaliczenie ćwiczeń. Ocena na podstawie egzaminu pisemnego:

91 – 100% bdb

81 – 90% db plus

71 – 80% db

61 – 70% dst plus

51 – 60% dst

mniej niż 51% ndst

ĆWICZENIA:

Wymagana jest obecność na co najmniej 80% zajęć. Ocena na podstawie dwóch kolokwiów:

91 – 100% bdb

81 – 90% db plus

71 – 80% db

61 – 70% dst plus

51 – 60% dst

mniej niż 51% nast.

Szczegółowe zasady oceniania są podawane na zajęciach.

VII. Obciążenie pracą studenta

Forma aktywności studenta	Liczba godzin
Liczba godzin kontaktowych z nauczycielem	90
Liczba godzin indywidualnej pracy studenta	60

VIII. Literatura

Literatura podstawowa
R. Sikorski, Funkcje rzeczywiste, t. I, PWN 1958
S. Łojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, PWN 1976
R. L. Schilling, Measures, Integrals and Martingales, Cambridge 2005
Literatura uzupełniająca
J. Niewiarowski, Zadania z teorii miary